Veri Zarflama Analizine Giriş

Dr. Öğr.Üyesi Serpil AYDIN

Kesirli Programlama Modeli

Örnek: Doktor sayısı ve hemşire sayısı girdi değişkenleri; ayaktan tedavi edilen hasta sayısı ve yatarak tedavi edilen hasta sayısı da çıktı değişkenleri olan 12 tane hastanenin verimliliğini değerlendirmek istediğimizde hangi hastanenin en verimli olduğu ve bir hastanenin diğerinden ne zaman daha verimli olduğu sorularını cevaplamak önemlidir. Verimliliğin, çıktının girdiye oranlanması olarak hesaplandığı düşünüldüğünde tek girdi ve tek çıktı olan durumlarda bu hesabı yapmak kolaydır. Ancak, üretim süreci birden fazla girdi ve birden fazla çıktı içeriyorsa tek bir çıktı/girdi oranı ile verimlilik değeri doğrudan hesaplanamaz. Bu durumda, her bir girdi ve çıktının göstergelerine ağırlık verilmesi gerekir. Girdiler ve çıktılar arasındaki göreli önemi yansıtan ağırlık katsayısının nasıl belirleneceği önemlidir.

Hastaneler	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
Doktor sayısı	20	19	25	27	22	55	33	31	30	50	53	38
Hemşire sayısı	151	131	160	168	158	255	235	206	244	268	306	284
Ayaktan hasta	100	150	160	180	94	230	220	152	190	250	160	250
Yatan hasta	90	50	55	72	66	90	88	80	100	100	147	120

Kesirli programlama modeli Charnes, Cooper ve Rhodes tarafından ilk geliştirilen modeldir. Model, her karar birimi için ağırlıklandırılmış çıktılarla, ağırlıklandırılmış girdilerin oranından yola çıkılarak oluşturulmuştur. n karar birimi, m girdi sayısı ve s çıktı sayısı olmak üzere k karar birimi için girdi verileri (X_{1k}, X_{2k},....., X_{mk}) ve çıktı verileri (Y_{1k}, Y_{2k}, ..., Y_{sk}) ile gösterilmektedir. Girdi verileri matrisi X ve çıktı verileri matrisi Y olmak üzere; girdi (mxn) ve çıktı (sxn) matrisleri aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

Öncelikle her karar birimi için ağırlıklar (v_{ik}) ve (u_{rk}) kullanılarak sanal girdi ve sanal çıktı oluşturulmaktadır.

Sanal Girdi = $v_{1k}\, X_{1k} + v_{2k}\, X_{2k} + \ldots\ldots\ldots + v_{mk}\, X_{mk}$

Sanal Çıktı = $u_{1k}\, Y_{1k} + u_{2k}\, Y_{2k} + \ldots\ldots\ldots + u_{sk}\, Y_{sk}$

VZA modellerinde; Sanal Çıktı / Sanal Girdi oranı maksimize edilecek şekilde ağırlıklar belirlenmektedir.

Kesirli programlama modeli için doğrusal programlama modellerinin çözümünde kullanılan Simpleks Algoritmasına benzer standart bir yöntem bulunmamaktadır. Ancak, etkinlik analizlerinde kullanılan matematiksel programlama modelinin özel yapısı kullanılarak, kesirli programlama modeli, doğrusal programlama modeline dönüştürülebilmektedir.

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ik}}$$

Burada;

s : Üretilen çıktı sayısını,

m : Kullanılan girdi sayısını,

urk : k karar birimi tarafından r’inci çıktıya verilen ağırlığı,

Yrk : k karar birimi tarafından üretilen r’inci çıktı miktarını,

vik : k karar birimi tarafından i’inci girdiye verilen ağırlığı,

Xik : k karar birimi tarafından kullanılan i’inci girdi miktarını, göstermektedir.

VZA yönteminde tüm karar birimleri, girdilere ve çıktılara verecekleri ağırlıkları serbestçe belirleyebilmektedirler. Her karar birimi ağırlıklarını, kendi toplam faktör verimliliği değerini maksimize edecek şekilde seçebilmelidir. Fakat, tüm karar birimlerinin kendilerini etkin yapacak ağırlıkları seçerek taraflı davranmalarının önlenebilmesi için modele iki kısıt eklenmiştir. Bu kısıtlayıcılardan birincisi ile yapılacak olan değerlendirmenin mantıklı olabilmesi için, tahsis edilen ağırlıkların 1'i geçmesi yani, ağırlıklı çıktıların toplamının, ağırlıklı girdilerin toplamından büyük olması engellenmektedir. İkinci kısıtlayıcıya göre de, tüm ağırlıklar pozitif değer taşımalıdır.

Toplam faktör verimliliği formülüne iki kısıtlayıcı eklendikten sonra, kesirli programlama modeli oluşmaktadır:

$$E_k = \text{Maksimum} \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ik}}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$u_{rk}, \; v_{ik} \geq 0 \qquad r = 1, \ldots, s \; ; \; i = 1, \ldots, m$$

n : Kara birimi sayısını,

E_k : k karar biriminin etkinlik değerini,

Y_{rj} : j'inci karar birimi tarafından üretilen r'inci çıktı miktarını,

X_{ij} : j'inci karar birimi tarafından kullanılan i'inci girdi miktarını, göstermektedir.

Daha sonra, yine Charnes, Cooper ve Rhodes tarafından tespit edilen modeldeki bir eksiklik düzeltilmiştir. Matematiksel programlama modelinde kullanılan u_{rk} ve v_{ik} ağırlıkları ile ilgili olan $u_{rk} \geq 0$ ve $v_{ik} \geq 0$ kısıtlayıcılarının $u_{rk} > 0$ ve $v_{ik} > 0$ şeklinde değiştirilmesi gerekmiştir. Kesirli programlama modelinde, ağırlıkların sıfıra eşit olamayacağı belirlenmiştir ve modeldeki bu kısıtlayıcılar $u_{rk} \geq \varepsilon$ ve $v_{ik} \geq \varepsilon$ haline dönüştürülmüştür. ε, 10^{-6} gibi çok küçük pozitif bir değer olarak alınmaktadır.

VZA modelleri, ağırlıklara ulaşabilmek amacıyla her bir karar birimi için bir optimizasyon prosedürü uygulamaktadır. Bunu yaparken aynı zamanda da söz konusu karar birimi için bir etkinlik değeri hesaplamaktadır. Her bir karar birimi için gerçekleştirilen optimizasyon sonucunda ayrıca, etkinsizliğin kaynakları ve miktarı konusunda da bilgi sağlamaktadır.

Kesirli programlama modeli ve tüm VZA modelleri girdiye ve çıktıya yönelik olarak iki şekilde tanımlanmıştır. Girdiye yönelik olan modellerde, belirli bir çıktı bileşimini etkin bir biçimde üretebilmek için kullanılabilecek en uygun girdi bileşimi araştırılırken, çıktıya yönelik modellerde, belirli bir girdi bileşimi ile üretilebilecek maksimum çıktı miktarı araştırılmaktadır.

Girdiye Yönelik Kesirli Programlama Modeli

Girdiye yönelik olarak kurulan VZA modelleri, amaç fonksiyonunun, yani karar biriminin etkinlik değerinin maksimum olması sağlayacak ağırlıkları tespit etmektedir. Girdiye yönelik kesirli programlama modeli aşağıdaki şekilde kurulmaktadır:

$$E_k = \text{Maksimum} \; \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ik}}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$u_{rk} \; , \; v_{ik} \; \geq \varepsilon \qquad r = 1, \ldots, s \; ; \; i = 1, \ldots, m$$

ε: Yeterince küçük pozitif bir sayıyı (0,0000001) göstermektedir.

Girdiye yönelik kesirli programlama modelinin kuruluşu aşağıdaki tabloda girdi ve çıktı miktarları verilen 6 karar biriminden oluşan bir örnek üzerinde incelenebilir.

	Karar Birimi	A	B	C	D	E	F
Girdiler	X_1	3	5	1	3	3	2
	X_2	3	1	5	3	3	1
Çıktılar	Y_1	2	5	1	5	1	3
	Y_2	2	1	5	1	5	2

VZA modellerinin çözümünde, tüm karar birimleri için modeller ayrı ayrı kurulup, çözülmektedir. Yukarıdaki örnekte A karar birimi için oluşturulacak olan girdiye yönelik kesirli programlama modeli aşağıdaki şekilde kurulmaktadır:

$$E_A = Maksimum \frac{2u_{1A} + 2u_{2A}}{3v_{1A} + 3v_{2A}}$$

$$\frac{2u_{1A} + 2u_{2A}}{3v_{1A} + 3v_{2A}} \leq 1$$

$$\frac{5u_{1B} + 1u_{2B}}{5v_{1B} + 1v_{2B}} \leq 1$$

$$\frac{1u_{1C} + 5u_{2C}}{1v_{1C} + 5v_{2C}} \leq 1$$

$$\frac{5u_{1D} + 1u_{2D}}{3v_{1D} + 3v_{2D}} \leq 1$$

$$\frac{1u_{1E} + 5u_{2E}}{3v_{1E} + 3v_{2E}} \leq 1$$

$$\frac{3u_{1F} + 2u_{2F}}{2v_{1F} + 1v_{2F}} \leq 1$$

Modelin çözümü yapıldıktan sonra, A karar biriminin etkinlik değeri, yani modelde amaç fonksiyonunun maksimum değeri, $E_A = 0,4615$ olarak bulunmaktadır. Bu sonuçtan hareketle A karar biriminin, karşılaştırması yapılan gözlem kümesi içerisindeki karar birimleri arasında, göreli olarak etkin olmadığı söylenebilmektedir.

Çıktıya Yönelik Kesirli Programlama Modeli

Çıktıya yönelik kesirli programlama modeli de girdiye yönelik kesirli programlama modeline benzemektedir. Aralarındaki fark, çıktıya göre kesirli programlama modelinin, ağırlıklandırılmış girdilerin, ağırlıklandırılmış çıktılara oranından meydana gelen amaç fonksiyonunu minimum yapan bir model olmasından kaynaklanmaktadır. Çıktıya yönelik kesirli programlama modeli aşağıdaki gibi kurulmaktadır:

$$F_k = \text{Minimum} \frac{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ik}}{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rk}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rj}} \geq 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$u_{rk} \;,\; v_{ik} \;\geq \varepsilon \qquad r = 1, \ldots, s \;;\; i = 1, \ldots, m$$

Modelin amaç fonksiyonunda F_k'nın alabileceği en küçük değer 1'dir ve amaç fonksiyonu değerinin 1'e eşit olması k karar biriminin etkin olduğu anlamına gelmektedir. F_k'nın 1'den küçük olması ise k karar biriminin etkin olmadığını göstermektedir. F karar birimi için model kurularak incelenebilir:

	Karar Birimi	A	B	C	D	E	F
Girdiler	X_1	3	5	1	3	3	2
	X_2	3	1	5	3	3	1
Çıktılar	Y_1	2	5	1	5	1	3
	Y_2	2	1	5	1	5	2

$$E_F = Minimum \frac{2v_{1F} + 1v_{2F}}{3u_{1F} + 2u_{2F}}$$

$$\frac{2v_{1F} + 1v_{2F}}{3u_{1F} + 2u_{2F}} \geq 1$$

$$\frac{3v_{1A} + 3v_{2A}}{2u_{1A} + 2u_{2A}} \geq 1$$

$$\frac{5v_{1B} + 1v_{2B}}{5u_{1B} + u_{2B}} \geq 1$$

$$\frac{1v_{1C} + 5v_{2C}}{1u_{1C} + 5u_{2C}} \geq 1$$

$$\frac{3v_{1D} + 3v_{2D}}{5u_{1D} + u_{2D}} \geq 1$$

$$\frac{3v_{1E} + 3v_{2E}}{1u_{1E} + 5u_{2E}} \geq 1$$

Modelin çözümü yapıldığında, amaç fonksiyonun minimum değeri $F_B = 1$ olarak bulunmaktadır. Bu sonuç B karar biriminin gözlem kümesi içerisinde göreli etkinliğe sahip olduğunu göstermektedir.

Ağırlıklı (Primal) Doğrusal Programlama Modelleri

Etkinlik değerlerinin hesaplanmasında kesirli programlama modeli kullanılmamaktadır. Bunun nedeni girdi ve çıktı sayılarının fazla olduğu durumlarda modelin çözümünün oldukça güç olmasıdır. Kesirli programlama modelinin çözümündeki güçlükleri ortadan kaldırmak amacıyla Charnes, Cooper ve Rhodes kesirli programlama modelini, doğrusal programlama modeline dönüştürebilmek için bir transformasyon kullanmışlardır.

Girdiye Yönelik Ağırlıklı Doğrusal Programlama Modeli

Girdiye yönelik kesirli programlama modelinde, amaç fonksiyonunda verilen ifadeyi, maksimize eden uygun çözüm (u*, v*) ise, bu nedenle tüm (βu*, βv*) mümkün çözümleri β > 0 olmak üzere amaç fonksiyonunu maksimize etmektedirler.

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ik} = 1$$

dönüşümü kullanılarak, sonsuz elemanlı çözüm kümesini temsil eden bir çözüm bulunmaktadır. Dönüşüm sonucu bulunan ve simpleks yöntemi ile çözülebilen girdiye yönelik model, aşağıdaki şekilde kurulmaktadır.

$$E_k = \text{Maksimum} \sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rk}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{ik} X_{ij} \leq 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$u_{rk}, v_{ik} \geq \varepsilon \qquad r = 1,\ldots,s \; ; \; i = 1,\ldots,m$$

Girdiye yönelik ağırlıklı doğrusal programlama modelinin kurulması Lagley Bölgesi'ndeki liselerin karşılaştırılmasının yapıldığı bir örnek üzerinde incelenebilir. Bu bölgeye dahil olan üç lisenin son sınıflarının değerlendirilmesi yapılacaktır. Değerlendirmede kullanılacak olan girdi ve çıktı miktarları tabloda gösterilmektedir.

Girdiler	Roosevelt	Lincoln	Washington
Son sınıflara ders veren öğretmen sayısı	37	25	23
Bütçe (100.000 $)	6,4	5	4,7
Kayıtlı son sınıf öğrencisi sayısı	850	700	600
Çıktılar	**Roosevelt**	**Lincoln**	**Washington**
Ortalama SAT değeri	800	830	900
Mezun olan öğrenci sayısı	450	500	400
Üniversiteye kabul edilen öğrenci sayısı	140	250	370

Roosevelt lisesinin değerlendirilmesinin yapılabilmesi için kurulacak olan girdiye yönelik doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibidir:

$$E_R = Maksimum\ 800u_{1R} + 450u_{2R} + 140u_{3R}$$

$$37v_{1R} + 6{,}4v_{2R} + 850v_{3R} = 1$$

$$800u_{1R} + 450u_{2R} + 140u_{3R} - (37v_{1R} + 6{,}4v_{2R} + 850v_{3R}) \leq 0$$

$$830u_{1R} + 500u_{2R} + 250u_{3R} - (25v_{1R} + 5v_{2R} + 700v_{3R}) \leq 0$$

$$900u_{1R} + 400u_{2R} + 370u_{3R} - (23v_{1R} + 4{,}7v_{2R} + 600v_{3R}) \leq 0$$

Modelin çözümünde Roosevelt Lisesi'ndeki son sınıfların gözlem kümesi içerisindeki göreli etkinlik değeri, E_R= 0,7517 olarak hesaplanmıştır. Bu durum Roosevelt Lisesi'nin göreli olarak etkin bir karar birimi olmadığını göstermektedir.

Çıktıya Yönelik Ağırlıklı Doğrusal Programlama Modeli

Çıktıya yönelik kesirli programlama modelinde, amaç fonksiyonunu minimum yapan ağırlıkların doğrusal kombinasyonları da amaç fonksiyonunun minimum olmasını sağlamaktadır. Kesirli programlama modelinde;

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk} Y_{rk} = 1$$

dönüşümü kullanılarak çıktıya yönelik primal doğrusal programlama modeli elde edilmektedir:

$$F_k = \text{Minimum} \quad \sum_{i=1}^{m} v_{ik}\ X_{ik}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{rk}\ Y_{rk} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ik}\ X_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_{rk}\ Y_{rj} \geq 0 \qquad j=1,\ldots\ldots,n$$

$$u_{rk}\ ,\ v_{ik} \geq \varepsilon \qquad r=1,\ldots.,s\ ;\ i=1,\ldots\ldots,m$$

Girdiye yönelik doğrusal programlama modeli ile çıktıya yönelik doğrusal programlama modeli arasındaki bağlantının açıklanabilmesi için tabloda girdi ve çıktı sayıları verilen Roosevelt Lisesi'nin çıktıya yönelik doğrusal programlama modeli kurulabilir.

Girdiler	Roosevelt	Lincoln	Washington
Son sınıflara ders veren öğretmen sayısı	37	25	23
Bütçe (100.000 $)	6,4	5	4,7
Kayıtlı son sınıf öğrencisi sayısı	850	700	600
Çıktılar	Roosevelt	Lincoln	Washington
Ortalama SAT değeri	800	830	900
Mezun olan öğrenci sayısı	450	500	400
Üniversiteye kabul edilen öğrenci sayısı	140	250	370

$$F_R = \text{Minimum} \quad 37\ v_{1R} + 6{,}4\ v_{2R} + 850\ v_{3R}$$

$$800\ u_{1R} + 450\ u_{2R} + 140\ u_{3R} = 1$$

$$37\ v_{1R} + 6{,}4\ v_{2R} + 850\ v_{3R} - (800\ u_{1R} + 450\ u_{2R} + 140\ u_{3R}) \geq 0$$

$$25\ v_{1R} + 5\ v_{2R} + 700\ v_{3R} - (830\ u_{1R} + 500\ u_{2R} + 250\ u_{3R}) \geq 0$$

$$23\ v_{1R} + 4{,}7\ v_{2R} + 600\ v_{3R} - (900\ u_{1R} + 400\ u_{2R} + 370\ u_{3R}) \geq 0$$

$$u_{(1,2,3)R}\ ,\ v_{(1,2,3)R} \geq \varepsilon$$

Roosevelt Lisesi için çıktıya yönelik doğrusal programlama modeli çözüldüğünde, amaç fonksiyonunun minimum değeri $F_R = 1{,}3302$ olarak hesaplanmaktadır. Bu sonuç $F_R > 1$ olduğundan Roosevelt Lisesi son sınıflarının gözlem kümesi içerisinde göreli etkin olmadıkları söylenebilmektedir. Girdiye yönelik olarak çözülen modelde amaç fonksiyonunun maksimum değeri

E_R = 0,7517 olarak hesaplanmıştı. Bu sonuçlara bakılarak girdiye ve çıktıya yönelik doğrusal programlama modellerinin arasındaki bağlantının $E_R = (F_R)^{-1}$ olduğu açıkça görülmektedir. 1/1,3302 = 0,7517.